18/03/2019

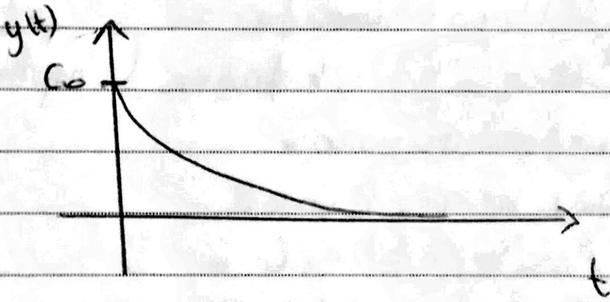
Μάθημα 6ο

## Κίνηση Υ.Σ

<u>Διαφορική Εξίσωση</u>: είναι η εξίσωση που περιέχει τόσο την άγνωστη συνάρτηση $y(t)$, όσο και παράγωγους της.
π.χ. $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), y^{(n+1)}(t))$, n-οστής τάξης ΣΔΕ.

$$\frac{dy}{dt} = a y(t), \quad a<0 \qquad \text{ΣΔΕ, } 1^{ης} \text{ τάξης, } 1^{ου} \text{ βαθμού, γραμ., ομογ.}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a\, dt \Rightarrow \ln|y| = c \cdot at \Rightarrow \boxed{y(t) = C_0 e^{at}}, \ a<0$$




<u>ΣΔΕ 1ης τάξης γραμμικές</u>

$y' + p(t) y(t) = q(t)$, τότε η λύση είναι:

$$y(t) = e^{-\int p(t)dt} \left[ c + \int q(t) e^{\int p(t)dt} dt \right]$$

<u>ΜΔΕ</u>

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \bar{\nabla}^2 u = 0, \quad \text{Laplace}$$

<u>Διαφορίσιμη</u>: $u(x,y)$ είναι, $u_x, u_y \ \forall (x,y) \in \Omega \in \mathbb{R}^2$
ολική μεταβολή της $u$ ως:
$$du = u_x dx + u_y dy = \bar{\nabla} u + d\bar{r}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Επίσης, η Laplace: $\bar{\nabla}^2 u = 0$ είναι:
ΜΔΕ $2^{ης}$ τάξης (ως προς $x$ και $y$), $1^{ου}$ βαθμού, γραμμική, ομογενής
(περιγράφει σταθερή κατάσταση, κάτι που έχει φτάσει σε ισορροπία)

π.χ. ΜΔΕ:
1) $\bar{\nabla} u = 0$, Laplace (Ελλειπτική)
2) $\bar{\nabla} u = g(x,y)$, Poisson (Ελλειπτική)
3) $u_t = D\cdot\bar{\nabla} u$, Εξίσωση Διάχυσης (Παραβολική)
4) $u_t = c\, u_x$ ή $u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$, κυματική (υπερβολική)

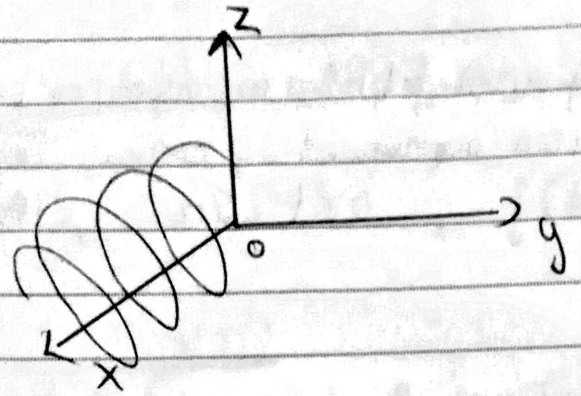
$u_t = c\,u_x$: ως προς μία κατεύθυνση κινούν. τα κύματα
$u_{tt} = c^2 u_{xx}$: περιγράφει κύματα που μπορούν να κινηθούν ως προς 2 κατευθ.

Σχόλιο: ΜΔΕ $\xrightarrow{\text{ανάγονται σε}}$ ΣΔΕ ή σύστημα ΣΔΕ.

Παράδειγμα: Η κίνηση ενός Υ.Σ. δίνεται από την τομή των επιφανειών: $\begin{cases} y = \sin(2\pi x) \\ z = \cos(2\pi x) \end{cases}$
Να βρεθεί η απόσταση, $S$, που διανύει το Υ.Σ. μεταξύ των σημείων $A(0,0,1)$ και $B(1,0,1)$

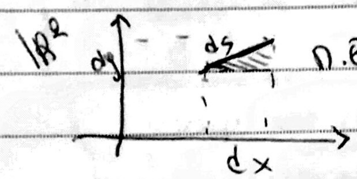
Απάντηση
Μπορώ να εκφράσω Δ.Θ.;
Τι μου ζητάει; → Απόσταση → Μπορώ να την υπολογίσω;

Σε καρτεσιανές συντεταγμ. θα είναι το ΔΘ.:
$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x\hat{i} + \sin(2\pi x)\hat{j} + \cos(2\pi x)\bar{k}$$ έλικα
Τι τροχιά κάνει το Υ.Σ.; ⊕ Σχεδιασμός
έλικα (Στον yz θα κάνει κύκλους) (Στο x κινεί του γραμμικά)




Η απόσταση S;

Στοιχειώδης απόσταση ds → $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

( 


Π.Θ: $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ) → (ομοίως και στο $\mathbb{R}^3$ )

$\frac{dy}{dx} = 2\pi\cos(2\pi x)$ Άρα: $dy = 2\pi\cos(2\pi x)\,dx$

Ομοίως: $dz = -2\pi x\sin(2\pi x)\,dx$

Άρα $ds^2 = dx^2 + 4\pi^2\cos^2(2\pi x)\,dx^2 + 4\pi^2\sin^2(2\pi x)\,dx^2 \Rightarrow$

$ds^2 = dx^2(1 + 4\pi(\sin^2(2\pi x) + \cos^2(2\pi x)))) \Rightarrow$

$ds^2 = dx^2(1+4\pi) \Rightarrow ds = \pm\sqrt{1+4\pi^2}\,dx \Rightarrow$

$ds = \sqrt{1+4\pi}\,dx$

Είναι: $S = \int_{S_0}^{S_1} ds = \int_{x_0=0}^{x_1=1} \sqrt{1+4\pi^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+4\pi^2}\,dx$

κατάφερα να γράψω το ds συναρτήσει του dx
και να μετασχηματίσω το ολοκλήρωμα, απλοποιώντας το

Άρα: $S = \sqrt{1+4\pi^2}\,x\Big|_0^1 = \sqrt{1+4\pi^2}$ (μονάδα μέτρησης → m)

Παράδειγμα: Να γραφεί σε παραμετρική μορφή ως προς το μήκος τόξου $S$, το Δ.Θ. που δίνεται παρακάτω:

$\bar{r}(t) = (3\cos t)\bar{i} + (3\sin t)\bar{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $\mathbb{R}^3$.

Απάντηση:

Το Δ.Θ. διαγράφει κύκλο ακτίνας 3.

Το μήκος τόξου συναρτήσει του χρόνου $t$:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

ή αλλιώς

Του μέτρου της μεταβολής της θέσης ως προς τον χρόνο

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt \quad \text{ή} \quad \int_{t_0}^{t_1} |\bar{u}|\, dt$$

Δυναμική Υλικού Σημείου

Δυναμική? (Δύναμη) ένα είδος δράσης που ασκείται στο Υ.Σ.

Είδη Δράσεων - Δυνάμεων

1) Βαρυτικές δυνάμεις — καθολικό επίπεδο
2) Ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις (Maxwell)
3) Πυρηνικές → ισχυρά (στους πυρήνες)
   ατομικό επίπεδο → ασθενείς ($e$-πυρήνας)

Χώρος: Ευκλείδιος, ομογενής και ισότροπος (ίδιες ιδιότητες σε κάθε σημείο του)

Χρόνος: Ομογενής και απόλυτος
(ρέει με τον ίδιο ρυθμό (t)) (δεν εξαρτάται από τον χώρο)

Νεύτωνας ~ 1660

Αξιώματα της Κ.Μ.: 1 Νόμος της αδράνειας
(Το Υ.Σ. δεν θέλει να αλλάξει την κινητική του κατάσ.)

Ορμή (ή ποσότητα κίνησης): $\bar{p} = m \cdot \bar{v}$

Για να εκφρασεί ο νόμος της αδράνειας

② Νόμος μεταβολής της ορμής: Η μεταβολή της ποσότητας κίνησης (ορμής) ισούται με το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στο Υ.Σ.

Δ.Ε. (2ος Ν.Ν.)

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \Sigma\bar{F} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \Sigma\bar{F} \xRightarrow{m:\text{σταθ}} m\frac{d\bar{v}}{dt} = \Sigma\bar{F} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m\cdot\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \Sigma\bar{F}} \quad ①$$

Υ.Σ.: δεν έχει διαστάσεις και είναι εφοδιασμένο μόνο με την μάζα του $m>0$.

Διανυσματική διαφορική εξίσωση

Έστω ότι ο χώρος μας $O \in \mathbb{R}^3$ περιγράφεται από τις καρτεσιανές

Τότε: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$

Οπότε ① $\Rightarrow$

$$\begin{cases} m\cdot\dfrac{d^2x}{dt^2} = \Sigma F_x \\[2ex] m\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2} = \Sigma F_y \\[2ex] m\,\dfrac{d^2z}{dt^2} = \Sigma F_z \end{cases}$$

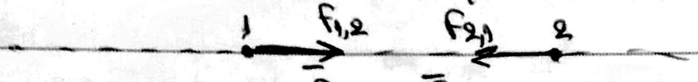
3 ΣΔΕ, 2ης τάξης η καθε μία.

Συνδέει αίτιο με αποτέλεσμα
ορμή (δύναμη) → μεταβολή της κινητικής κατάστ. του Υ.Σ.

Αρχή του καθορισμού: Η εξέλιξη της κίνησης ενός συστήματος ή Υ.Σ. εξαρτάται:
1) από την αρχική θέση του Υ.Σ.
2) από τον 2ο Ν.Ν.

## 3) Νόμος Δράσης - Αντίδρασης

Οι δυνάμεις που ασκούνται από ένα σώμα σ' ένα άλλο είναι ίσες σε μέτρο και αντίθετες σε φορά, εφαρμόζονται πάνω στην ευθεία που συνδέει τα δύο κέντρα (ή τα δύο Υ.Σ.)



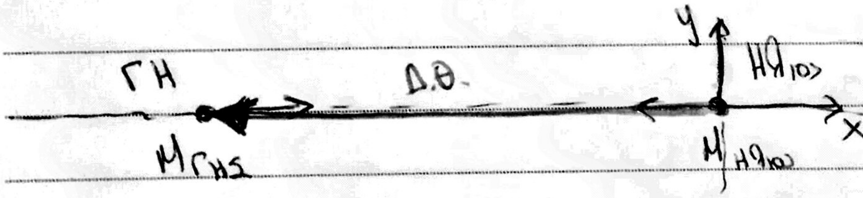

$\bar F_{12} = -\bar F_{21}$

## 4) Αρχή Ανεξαρτησίας των Δυνάμεων

Η δύναμη δεν επηρεάζει άμεσα μια άλλη δύναμη, παρά μόνο το αποτέλεσμά της.

Μονάδα Μέτρησης: 1 Nt, είναι η δύναμη που πρέπει να ασκηθεί ώστε ένα σώμα μάζας $m = 1$ kgr, να κινηθεί με $\bar a = 1 m/s^2$

## Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης




Το ένα ασκεί δύναμη στο άλλο

Η δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης

$$\boxed{\bar F = G \frac{M_Γ \cdot M_Η}{r^2} \cdot \bar r_μ}$$

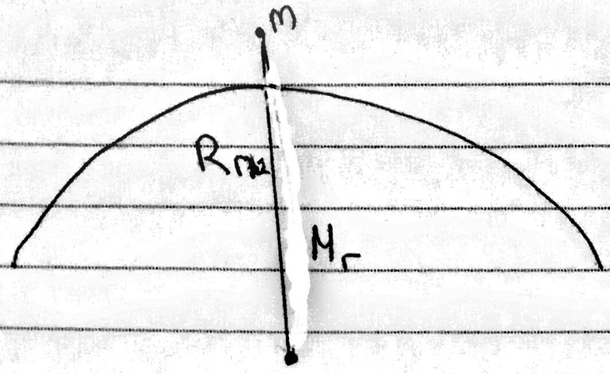
Ηλιοκεντρικό το σύστημα

όπου: $\bar r_μ$ = μοναδιαίο διάνυσμα

$\bar r_μ = \frac{\bar r}{|\bar r|}$ δίνει τη κατεύθυνση

$$\Rightarrow \bar F = -G \frac{M_Γ \cdot M_Η}{|r|^3} \bar r \quad , \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{N t m^2}{Kg^2}$$

(Το μείον από σύμβαση)




$$\bar{F} = -G \frac{M_r}{R^2_{rH2}} m\bar{r} \Rightarrow \bar{F} = -\bar{g} m\bar{r} \Rightarrow \bar{g} = G \cdot \frac{M_r}{R^2_{rH2}}$$